

Кубок школы 10 класс

1. Найти все решения уравнения $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 5$.

2. Баба Яга и Кащей Бессмертный собирали мухоморы. Общее число крапинок на мухоморах Бабы Яги оказалось в 13 раз больше, чем у Кащея. Когда Баба Яга отдала Кащею мухомор с наименьшим количеством крапинок, на её мухоморах стало в 8 раз больше крапинок, чем у Кащея. Доказать, что сначала у Бабы Яги было не более 23 мухоморов.

3. Пусть AM — медиана прямоугольного треугольника ABC , проведённая из вершины прямого угла A , а P и Q — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABM , с его сторонами AB и BM соответственно. Известно, что PQ параллельно AM . Найти углы треугольника ABC .

4. Найти все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = x(y + z)$.

5. На доске написано выражение: $4-5-7-11-19=22$. Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство.

6. Найдите многочлен с целочисленными коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

11класс

Задача1

Докажите, что уравнение $xу = 2006(x+y)$ имеет решения в целых числах.

Задача2

Докажите, что если α , β , γ - углы произвольного треугольника, то справедливо тождество $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

Задача3

Три шара радиуса R касаются друг друга и плоскости α , четвертый шар радиуса R положен сверху так, что касается каждого из трех данных шаров. Определите высоту «горки» из четырех шаров.

Задача4

Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.

Задача5

Решите уравнение $\sin^4x + \cos^2x = 2\sin x \cos^4x$.

Задача6

В каждую клетку квадратной таблицы 25×25 вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1.

Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.